

УДК 530.145, 512.81
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-30-33

Н.А. ГРОМОВ, И.В. КОСТЯКОВ, В.В. КУРАТОВ

КОГЕРЕНТНОСТЬ В ОТКРЫТОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЕ

*Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, г. Сыктывкар*

*gromov@ipm.komisc.ru
kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru*

N.A. GROMOV, I.V. KOSTYAKOV, V.V. KURATOV

COHERENCE IN AN OPEN QUANTUM SYSTEM

*Institute of Physics and Mathematics
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktывkar*

Аннотация

Рассматривается двухуровневая открытая квантовая система, взаимодействующая с окружающей средой тепловым и электромагнитным образом. В результате теплового взаимодействия первоначально некоммутирующие квантовые наблюдаемые в процессе эволюции частично приобретают классические черты, что проявляется в изменении (контракции) их коммутационных соотношений от $su(2)$ до алгебры Гейзенберга, а система становится некогерентной. При комбинированном тепловом и электромагнитном взаимодействии системы с окружающей средой наблюдаемые теряют квантовые свойства и становятся чисто классическими коммутирующими наблюдаемыми. Однако система при этом сохраняет свойство когерентности.

Ключевые слова:

диссипативные квантовые системы, алгебра наблюдаемых, кубит, когерентность, контракции алгебр Ли

Abstract

A two-level open quantum system interacting with the environment in a thermal and magnetic manner is considered. As a result of thermal interaction, initially non-commuting quantum observables in the process of evolution partially acquire classical features, which is manifested in the change (contraction) of their commutation relations from $su(2)$ to the Heisenberg algebra, and the system becomes incoherent. With the combined thermal and magnetic interaction of the system with the environment, the observables lose their quantum properties and become purely classical commuting observables. However, the system retains the coherence property.

Keywords:

dissipative quantum systems, algebra of observables, qubit, coherence, contractions of Lie algebras

Введение

Основной сложностью создания квантовых компьютеров является быстрая декогеренция квантовых состояний открытых систем [1–3]. Диссипативные процессы в открытых квантовых системах с точки зрения контракций анализируются в работах [4–7]. Возможность сохранения когерентности открытых систем, по-видимому, демонстрирует нам природа на примере явлений фотосинтеза [8–11]. В данной работе мы приводим пример эволюции кубита, взаимодействующего с открытой системой, но сохраняющего когерентность. Все коммутаторы алгебры наблюдаемых при этом обнуляются, демонстрируя классическое поведение.

Известно, что диссипативная эволюция матрицы плотности кубита

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \quad (1)$$

описывается уравнением Линдблада [1, 2, 5]

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\rho, \hat{H}] + \sum_k \left(V_k \rho V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho\} \right), \quad (2)$$

или для наблюдаемых σ_i

$$\dot{\sigma}_i = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \sigma_i] + \sum_k \left(V_k^+ \sigma_i V_k - \frac{1}{2} \{V_k^+ V_k, \sigma_i\} \right). \quad (3)$$

Двухуровневая система в тепловом поле

Квантовая двухуровневая система [1] характеризуется наблюдаемыми $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= 2i\sigma_z, & [\sigma_y, \sigma_z] &= 2i\sigma_x, \\ [\sigma_z, \sigma_x] &= 2i\sigma_y, \end{aligned} \quad (4)$$

образующими алгебру $su(2)$.

Рассмотрим двухуровневую систему в тепловом поле [6, 12]. Обозначим оператор перехода из основного состояния $|0\rangle$ в возбужденное $|1\rangle$ как $A^+ = \sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$, а оператор перехода из верхнего состояния в основное — через $A = \sigma_- = |0\rangle\langle 1|$.

Пусть уравнение Линдблада содержит только диссипативную часть ($H = 0, V = A$), тогда вместо (2) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\gamma}{2}(n+1)(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \{\sigma_+ \sigma_-, \rho\}) + \\ &+ \frac{\gamma n}{2}(2\sigma_+ \rho \sigma_- - \{\sigma_- \sigma_+, \rho\}), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y), \quad n = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right) - 1}. \quad (6)$$

Здесь $\hbar\omega_0$ — разность уровней энергии основного и возбужденного состояний, γ — константа взаимодействия, T — температура окружающей среды.

Переписывая уравнение (5) в терминах переменных x, y, z , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) x, \\ \dot{y} = -\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) y, \\ \dot{z} = -\gamma(1 + (2n+1)z), \end{cases} \quad (7)$$

решения которой имеют вид

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t} x_0, \\ y(t) = e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t} y_0, \\ z(t) = e^{-\gamma(1+2n)t} \left(z_0 + \frac{1}{1+2n} \right) + z_s, \end{cases} \quad (8)$$

где $z_s = -(1+2n)^{-1}$. С учетом (6), имеем $z_s = -1$ при нулевой температуре $T = 0$ окружающей среды, что соответствует основному состоянию системы $|0\rangle$

с матрицей плотности $\rho = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. При возрастании температуры $T \rightarrow \infty$ получаем $z_s \rightarrow$

0, что соответствует полностью смешанному состоянию системы $\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Формулы (8) при $t \rightarrow \infty$ описывают эволюцию кубита. Поскольку в процессе эволюции x и $y \rightarrow 0$, то матрица плотности (1) диагонализируется, что соответствует потере кубитом когерентности. Траектории эволюции кубита изображены на рис. 1.

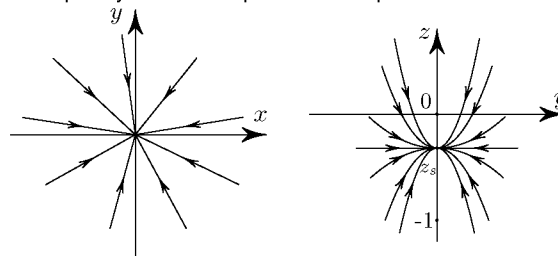


Рис. 1. Траектории эволюции кубита (8) в плоскостях (x, y) и (y, z) .

Fig. 1. Evolution trajectories of a qubit (8) in the planes (x, y) and (y, z) .

Что касается наблюдаемых системы, то уравнение (3) переписывается

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= \frac{\gamma}{2}(n+1)(2\sigma_+ \sigma_i \sigma_- - \{\sigma_+ \sigma_-, \sigma_i\}) + \\ &+ \frac{\gamma}{2}n(2\sigma_- \sigma_i \sigma_+ - \{\sigma_- \sigma_+, \sigma_i\}). \end{aligned} \quad (9)$$

Для наблюдаемых $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ оно принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_x = -\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \sigma_x, \\ \dot{\sigma}_y = -\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \sigma_y, \\ \dot{\sigma}_z = -\gamma I - \gamma(2n+1)\sigma_z \end{cases} \quad (10)$$

и имеет решения

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t} \sigma_x, \\ \sigma_y(t) &= e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t} \sigma_y, \\ \sigma_z(t) &= e^{-\gamma(1+2n)t} \left(\sigma_z + \frac{I}{1+2n} \right) - \frac{I}{1+2n} \end{aligned} \quad (11)$$

с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y]_t &= 2i \left(\sigma_z + \frac{I}{1+2n} (1 - e^{-\gamma(2n+1)t}) \right), \\ [\sigma_y, \sigma_z]_t &= 2ie^{-\gamma t} \sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x]_t = 2ie^{-\gamma t} \sigma_y. \end{aligned} \quad (12)$$

Переобозначая $\sigma_z \rightarrow \sigma_z + \frac{I}{1+2n}$ в пределе $t \rightarrow \infty$ имеем алгебру Гейзенберга.

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y]_{\infty} &= 2i\sigma_z, \\ [\sigma_y, \sigma_z]_{\infty} &= 0, \quad [\sigma_z, \sigma_x]_{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, в результате теплового взаимодействия кубита с окружающей средой первоначально некоммутирующие квантовые наблюдаемые $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (4) в процессе эволюции частично приобретают классические черты, что проявляется в изменении (контракции) их коммутационных соотношений до алгебры Гейзенберга.

Двухуровневая система в тепловом и электромагнитном полях

Добавим теперь в правую часть уравнения (5) гамильтониан взаимодействия с когерентным электромагнитным полем

$$H_I = h\sigma_x. \quad (14)$$

Уравнение Линдблада (2) преобразуется в систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) x, \\ \dot{y} = -\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) y - 2hz, \\ \dot{z} = -\gamma(1 + (2n + 1)z) + 2hy. \end{cases} \quad (15)$$

Эта система имеет предельную точку типа узел с координатами

$$\begin{aligned} x_s &= 0, \\ y_s &= \frac{4h\gamma}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}, \\ z_s &= -\frac{\gamma^2(2n + 1)}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Решения системы (15) описываются формулами

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t}x_0, \\ y(t) &= (y_0 - y_s) (C_+e^{-\lambda-t} - C_-e^{-\lambda+t}) + \\ &+ \frac{2h(z_0 - z_s)}{\sqrt{\gamma^2(n+\frac{1}{2})^2 - 16h^2}} (e^{-\lambda-t} - e^{-\lambda+t}) + y_s, \\ z(t) &= (z_0 - z_s) (C_+e^{-\lambda+t} - C_-e^{-\lambda-t}) + \\ &+ 2h(y_0 - y_s) (e^{-\lambda+t} - e^{-\lambda-t}) + z_s, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} C_{\pm} &= \frac{\gamma(n+\frac{1}{2}) \pm \sqrt{\gamma^2(n+\frac{1}{2})^2 - 16h^2}}{2\sqrt{\gamma^2(n+\frac{1}{2})^2 - 16h^2}}, \\ \lambda_{\pm} &= \frac{3}{2}\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - 16h^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Соответствующие траектории эволюции кубита изображены на рис.2.

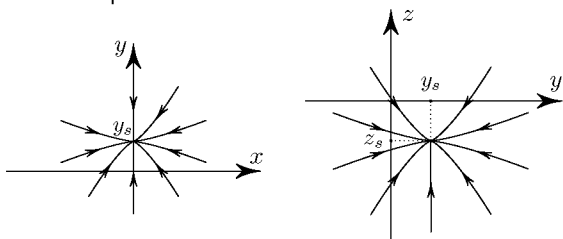


Рис. 2. Траектории эволюции кубита (15) в плоскостях (x, y) и (y, z) .

Fig.2. Evolution trajectories of a qubit (15) in the planes (x, y) and (y, z) .

Уравнения для наблюдаемых в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_x = -\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \sigma_x, \\ \dot{\sigma}_y = -\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \sigma_y - 2a\sigma_z, \\ \dot{\sigma}_z = -\gamma(1 + (2n + 1)\sigma_z) + 2a\sigma_y, \end{cases} \quad (19)$$

а решения даются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t}\sigma_x, \\ \sigma_y(t) &= \left(\sigma_y - \frac{4h\gamma}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2} \mathbf{I} \right) \times \\ &\times (C_+e^{-\lambda-t} - C_-e^{-\lambda+t}) + \frac{2h}{\sqrt{\gamma^2(n+\frac{1}{2})^2 - 16h^2}} \times \\ &\times \left(\sigma_z + \frac{\gamma^2(2n + 1)}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2} \mathbf{I} \right) (e^{-\lambda-t} - e^{-\lambda+t}) + \\ &+ \frac{4h\gamma}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2} \mathbf{I}, \\ \sigma_z(t) &= \left(\sigma_z + \frac{\gamma^2(2n + 1)}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2} \mathbf{I} \right) \times \\ &\times (C_+e^{-\lambda+t} - C_-e^{-\lambda-t}) + \\ &+ 2h \left(\sigma_y - \frac{4h\gamma}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2} \mathbf{I} \right) \times \\ &\times (e^{-\lambda+t} - e^{-\lambda-t}) - \\ &- \frac{\gamma^2(2n + 1)}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2} \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (20)$$

В пределе $t \rightarrow \infty$ алгебра наблюдаемых становится абелевой

$$[\sigma_x, \sigma_y]_{\infty} = [\sigma_y, \sigma_z]_{\infty} = [\sigma_z, \sigma_x]_{\infty} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, в результате теплового и электромагнитного взаимодействия двухуровневой квантовой системы с окружающей средой первоначально некоммутирующие квантовые наблюдаемые $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (4) в процессе эволюции теряют квантовые свойства и становятся чисто классическими коммутирующими наблюдаемыми. Однако система при этом сохраняет свойство когерентности.

Авторы выражают благодарность А.А. Карбанову за плодотворные обсуждения.

